6.1

Алгоритм порождения логнормальных случайных величин с параметрами $(\mu,\, \sigma^2)$ — $\exp\{N(\mu,\, \sigma^2)\}$
Сначала порождаем равномерно распределенные случайные величины на $[0; 1]$ (обозначим их v_j).

$$x_{j+1} = (a \cdot x_j) \bmod M, \qquad y_{j+1} = (b \cdot y_j) \bmod Q,$$

$$z_j = (x_j - y_j) \bmod (M-1), \qquad v_j = \frac{z_j}{M-1}$$

$$a = 40014,\ M = 2147483563,$$

$$b = 406292,\ Q = 2147483399.$$

Далее, пользуясь равномерно распределенными случайными величинами, порождаем нормальные с параметрами $(0, 1)$ (обозначим их N_j).

$$N_{2i-1} = \sqrt{-2\ln v_{2i-1}} \cdot \cos 2\pi v_{2i}\,;$$

$$N_{2i} = \sqrt{-2\ln v_{2i}} \cdot \sin 2\pi v_{2i+1}$$

Теперь получаем нормальные случайные величины с параметрами $(\mu,\, \sigma^2)$ (обозначим их N_j^*)

$$N_j^* = \mu + \sigma(N_j - \overline{N}_n)$$

Отсюда находим логнормальные случайные величины с параметрами $(\mu,\, \sigma^2)$ как $e^{N_j^*}$.

Алгоритм порождения случайных величин с распределнием Бирнбаума-Сондерса $BS(\alpha; \sigma)$: Порождение равномерно распределенных и нормальных с параметрами $(0, 1)$ делается аналогично предыдущему алгоритму. А нужное нам распределение с параметрами $(\alpha; \sigma)$ будет иметь такая случайная величина:

$$\sigma\left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2 N^2 + \alpha N \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4}\alpha^2 N^2}\right)$$

6.2

Алгоритм порождения логнормальных случайных величин $\exp\{N(\mu,\, \sigma^2)\}$ на языке Statistica Basic.

```
a:=40014;
b:=406292;
M:=2147483563;
Q:=2147483399;
x:=100;
y:=100;

for i:=1 to ncases do begin
```

```
x:=(x*a)mod (M);
y:=(y*b)mod (Q);
v1(i):=((x-y)mod(M-1)/(M-1));
end;

for j:=1 to (ncases)/2 do begin
v2(2*j-1):=sqrt(-2*log(v1(2*j-1)))*sin(2*Pi*v1(2*j));
v2(2*j):=sqrt(-2*log(v1(2*j)))*cos(2*Pi*v1(2*j-1));
end;

s:=0;
for i:=1 to ncases do s:=s+v2(i);
s:=s/ncases;
for j:=1 to ncases do v2(j):=mu+sigma(v2(j)-s);
for j:=1 to ncases do v2(j):=exp(v2(j));
end;
```

Алгоритм порождения случайных величин с распределением Бирнбаума-Сондерса $BS(\alpha;\sigma)$ на языке Statistica Basic.

```
a:=40014;
b:=406292;
M:=2147483563;
Q:=2147483399;
x:=100;
y:=100;

for i:=1 to ncases do begin
x:=(x*a)mod (M);
y:=(y*b)mod (Q);
v1(i):=((x-y)mod(M-1)/(M-1));
end;

for j:=1 to (ncases)/2 do begin
v2(2*j-1):=sqrt(-2*log(v1(2*j-1)))*sin(2*Pi*v1(2*j));
v2(2*j):=sqrt(-2*log(v1(2*j)))*cos(2*Pi*v1(2*j-1));
end;

for j:=1 to ncases do begin
v3(j):=sigma(1+(a*v2(j))*(a*v2(j))/2+a*v2(j)*sqrt(1+(a*v2(j))*(a*v2(j))/4);
end;
```

6.3

Проверим качество датчика для случайных логнормальных величин с помощью гистограммы, P—P бумаги и критерия серий (см. Приложение1).

Проверим качество датчика случайных величин с распределением Бирнбаума-Сондерса с помощью P—P бумаги и критерия серий (см. Приложение2).

6.4

Каталог графиков плотностей для распределений логнормального и Бирнбаума-Сондерса(см. Приложение3).

6.5

Оценка максимального правдоподобия для распределения Бирнбаума-Сондерса.

1) Функция распределения.

$$F_{BS(\alpha,\sigma)}(u) = \Phi\left(\frac{\sqrt{\frac{u}{\sigma}} - \sqrt{\frac{\sigma}{u}}}{\alpha}\right),$$

где $\Phi(u)$ – функция стандартного нормального распределения.

2) Плотность распределения.

$$f_{BS(\alpha,\sigma)}(u) = f_{N(0,1)}\left(\frac{\sqrt{\frac{u}{\sigma}} - \sqrt{\frac{\sigma}{u}}}{\alpha}\right) \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\sqrt{\frac{u}{\sigma}} - \sqrt{\frac{\sigma}{u}}\right)'_u =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\alpha u} \cdot \left(\sqrt{\frac{u}{\sigma}} + \sqrt{\frac{\sigma}{u}}\right) \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{u}{\sigma} + \frac{\sigma}{u} - 2\right)\right\}$$

3) Функция правдоподобия.

$$L(y;\alpha,\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\alpha y_i} \cdot \left(\sqrt{\frac{y_i}{\sigma}} + \sqrt{\frac{\sigma}{y_i}}\right) \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{y_i}{\sigma} + \frac{\sigma}{y_i} - 2\right)\right\},$$

прологорифмируем функцию правдоподобия $l(y;\alpha,\sigma) = \ln L(y;\alpha,\sigma)$, получаем

$$l(y;\alpha,\sigma) = -n\ln\left(2\sqrt{2\pi}\right) - n\ln\alpha + \frac{n}{\alpha^2} - \frac{n}{2}\ln\sigma - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\ln y_i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\ln\left(1 + \frac{\sigma}{y_i}\right) - \frac{n}{2\alpha^2\sigma} \cdot \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \frac{n\sigma}{2\alpha^2} \cdot \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i}\right).$$

Вводим статистики

$$h(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad\qquad H(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i}.$$

Подставляем данные и получаем значения статистик

$$h = 0,007696262 \qquad\qquad H = 133,7326733.$$

4) Частные производные $l(y;\alpha,\sigma)$ по параметрам α и σ.

$$l'_\alpha = -\frac{n}{\alpha^3\sigma} \cdot \left(\sigma\alpha^2 + 2\sigma - h - \sigma^2 H\right);$$

$$l'_\sigma = -\frac{n}{2\alpha^2\sigma^2} \cdot \left(\sigma\alpha^2 + \frac{2\alpha^2\sigma^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i + \sigma} - h + \sigma^2 H\right).$$

Приравниваем частные производные к 0.

$$\begin{cases} \sigma\alpha^2 + 2\sigma - h - \sigma^2 H = 0 \\ \sigma\alpha^2 + \frac{2\alpha^2\sigma^2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i+\sigma} - h + \sigma^2 H = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha^2 = \frac{\sigma^2 H + h - 2\sigma}{\sigma} \\ 0 = H - \frac{1}{\sigma} - \left(\frac{\sigma H}{n} + \frac{h}{n\sigma} - \frac{2}{n}\right)\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i+\sigma} \end{cases}$$

Решаем систему получаем

$$\breve{\alpha} = 0,17 \qquad \breve{\sigma} = 131,98.$$

Оценка по методу моментов для распределения Бирнбаума-Сондерса.

1) Начальные теоретические моменты:

$$a_1 = \sigma\left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right), \quad a_2 = \sigma^2\left(1 + 2\alpha^2 + \frac{3}{2}\alpha^4\right)$$

2) Начальные эмпирические моменты:

$$A_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \qquad A_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2$$

3) Приравниваем начальные теоретические и эмпирические моменты, получаем систему уравнений, из которой выражаем σ и получаем уравнение на α:

$$\sigma = \frac{a_1}{1 + \frac{\alpha^2}{2}}, \quad \alpha^4(A_2 - 6A_1^2) + \alpha^2\left(4A_2 - 8A_1^2\right) + 4A_2 - 4A_1^2 = 0$$

Откуда находим:

$$\alpha = \sqrt{\frac{-2A_2 + 4A_1^2 \pm 2\sqrt{-2{A_1}^4 + 3A_1^2 A_2}}{A_2 - 6A_1^2}}$$

4) Подставляем данные ($A_1 = 133,73$ $A_2 = 18379,26$), отсеиваем неподходящий корень, получаем оценки:

$$\tilde{\alpha} = 0,166 \qquad \tilde{\sigma} = 131,913$$

Оценка максимального правдоподобия для логнормального распределения.

Рассмотрим случайные величины $x_i = \ln y_i$. Тогда $x_i \stackrel{d}{=} N(\mu, \sigma^2),\ i = \overline{1,n}$ Для параметров нормального распределения ОМП известны:

$$\breve{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad\qquad \breve{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x_n})^2}$$

Таким образом, оценки параметров для логнормального распределения в нашем случае:

$$\breve{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln y_i = 4,882 \qquad\qquad \breve{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln y_i - \breve{\mu})^2} = 0,170.$$

Оценка по методу моментов параметров для логнормального распределения.

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln y_i = 4,882 \qquad\qquad \tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln y_i - \tilde{\mu})^2} = 0,170.$$